

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE .

1. Obliczyć (lub wykazać rozbieżność) całki niewłaściwe: a) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$ $[\frac{1}{2}]$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ $[\pi]$
- c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$ $[\frac{3}{4}\pi]$ d) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$ $[1 - \ln 2]$ e) $\int_1^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^4} dx$ $[\frac{2}{3}]$ f) $\int_0^2 \frac{x\sqrt{x}}{x^4} dx$ g) $\int_0^4 \frac{x\sqrt{x} + 2x}{x^3} dx$
- h) $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ $[\frac{\pi}{6}]$ i) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$ $[\frac{8}{3}]$ j) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ [f, g, j - rozbieżne].

LICZBY ZESPOLONE.

1. Wykonać działania, wynik doprowadzić do postaci kartezjańskiej: a) $\frac{(1+i) \cdot (2-i)}{(1-2i)^2}$ b) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.
2. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć zbiór liczb, spełniających warunki:
- a) $\operatorname{Re}(iz + 2) < 0$ b) $\operatorname{Re}[4 + 7i - (2-i)z] = 2$ c) $\operatorname{Im}[(2-2i)z + 1 - 3i] \geq 1$ d) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$ e) $\operatorname{Im}(z^2) \leq 0$
- f) $|z|^2 = 2\operatorname{Re} z$ g) $\left| \frac{4+3i}{z-i} \right| \leq 5$.
3. Niech $z_1 = 2\left(\cos\frac{1}{5}\pi + i\sin\frac{1}{5}\pi\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{3}{10}\pi + i\sin\frac{3}{10}\pi\right)$. Wykorzystując wzory Moivre'a, obliczyć wartość $z_1^3 \cdot z_2^3$. Wynik doprowadzić do postaci kartezjańskiej.
4. Korzystając ze wzorów Moivre'a, obliczyć wartość następującego wyrażenia i doprowadzić wynik do postaci kartezjańskiej: a) $(1-i)^9$ b) $\frac{(1+i)^{22}}{(-1+\sqrt{3}i)^6}$ c) $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{-1-i}\right)^7$.
5. Korzystając ze wzorów Moivre'a, obliczyć wszystkie pierwiastki podanego stopnia z liczby zespolonej z . Podać wyniki w postaci kartezjańskiej. Przedstawić pierwiastki graficznie na płaszczyźnie zespolonej:
- a) trzeciego st. z liczby $z = -8i$ b) czwartego st. z liczby $z = -1$ c) czwartego st. z liczby $z = -8 + 8\sqrt{3}i$.
6. Rozwiązać równanie zespolone: a) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$ b) $z^4 + z = 0$ c) $z^3 - 8 = 0$
- d) $z^2 + (-1+3i)z - 2(1+i) = 0$ e) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$ f) $iz^2 - (4-i)z + (1-5i) = 0$ g) $z^4 + (4-2i)z^2 - 8i = 0$.