CIĄGI LICZBOWE. GRANICA CIĄGU.

1. Znaleźć 3 początkowe wyrazy ciągu, jeżeli: a) $a_n = \frac{(n+2)! + n!}{(n+1)!}$ b) $b_n = 1 + \frac{(-2)^{n+1}}{n^2}$.

2. Podać wzór na n-ty wyraz ciągu o następujących sześciu wyrazach początkowych: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{16}, \frac{5}{32}$.

3. Zbadać monotoniczność ciągu: a) $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$ b) $b_n = \frac{4^n - 1}{4^n}$ c) $c_n = \frac{4^n}{(n+1)!}$.

4. Wypisać 3 pierwsze ciągu, a potem zbadać jego monotoniczność zakładając, że $n \geq 3$:

a) $a_n = \frac{3^n - 12}{4^n}$ b) $b_n = \frac{3^n + 15}{2^n}$.

5. Wykazać, że ciąg jest ograniczony, podając liczby ograniczające z dołu i z góry:

a) $a_n = \frac{1+n^2}{1+n^3}$ b) $b_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ c) $c_n = \frac{3n+1}{n} \cdot \cos((n+1)\pi)$ d) $d_n = \frac{2^n}{n!}$.

6. Znaleźć granicę ciągu: a) $\lim \frac{(2n-1)^2}{n^2+3n-1}$ b) $\lim \frac{3n^2 - 4\sqrt{n^4+1}}{n^2-2n+4}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n \cdot \sqrt{n^4+3n}}{2n^3 + 2 \cdot \sqrt{4n^6+12n^3}}$

d) $\lim \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n} - 4}{n - \sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 7}$ e) $\lim \frac{(2n+1) \cdot \sqrt{8n^3+2}}{(5n+3) \cdot \sqrt{n^2+7}}$ f) $\lim \frac{2 \cdot 4^{n+1} - 5^{n+2}}{5^n - 4^n}$ g) $\lim \frac{2^{2n+1} - 3^{2n+2}}{5^{n+4} + 9^n}$

h) $\lim\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+4}\right)$ i) $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+3} - \sqrt{n^2+2n}\right)$ j) $\lim \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

7. Dla podanych niżej ciągów znaleźć granicę $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$: a) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $a_n = \frac{3^n \cdot n^n}{n!}$ c) $a_n = \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$.

8. Dana jest funkcja: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^3}{(x-1)^3} - \ldots$, której prawa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Znaleźć dziedzinę tej funkcji i dla $x \in D$ obliczyć jawną postać $f(x)$.

9. Rozwiązać nierówność: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots > -1 - x$.