CIĄGI LICZBOWE. GRANICA CIĄGU.

1. Dane są ciągi : $a_n = \dfrac{(n+2)!+n!}{(n+1)!}$; $b_n = 1 + \dfrac{(-2)^{n+1}}{4n^2}$. Znaleźć dwa początkowe wyrazy ciągu $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ oraz wyrażenie określające wyrazy a_{n+2} i b_{n+1} (w najprostszej postaci) .

2. Podać wzór na n-ty wyraz ciągu o następujących wyrazach początkowych:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}, \dfrac{1}{4\sqrt{3}}, \dfrac{1}{5\sqrt{4}}$; b) $\dfrac{1}{11}, \dfrac{2}{101}, \dfrac{3}{1001}, \dfrac{4}{10001}$; c) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{8}, -\dfrac{4}{16}, \dfrac{5}{32}$.

3. Zbadać monotoniczność ciągu: a) $a_n = 3^n - 2^n$ b) $a_n = \dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$ c) $c_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

4. Wypisać 3 pierwsze ciągu, a potem zbadać jego monotoniczność : a) $a_n = \dfrac{3^n - 12}{4^n}$ b) $b_n = \dfrac{3^n + 15}{2^n}$.

5. Wykazać, że poniższy ciąg jest ograniczony (podać liczby ograniczające jego wyrazy z dołu i z góry) :

a) $a_n = \sqrt{n+6} - \sqrt{n+5}$ b) $c_n = \dfrac{3n+1}{n} \cdot \cos((n+1)\pi)$ c) $b_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

6. Wykazać, że $\{a_n\}$ jest ciągiem geometrycznym i znaleźć jego iloraz : a) $a_n = 3 \cdot 2^{4n+1}$ b) $a_n = 3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n$.

7. Znaleźć granicę ciągu:

a) $\lim \dfrac{(2n-1)^2}{n^2+3n-1}$ b) $\lim \dfrac{3n^2 - 4\sqrt{n^4+1}}{n^2-2n+4}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - n \cdot \sqrt{n^4+3n}}{2n^3 + 2 \cdot \sqrt{4n^6+12n^3}}$ d) $\lim \dfrac{(2n+1)\cdot\sqrt{8n^3+2}}{(5n+3)\cdot\sqrt{n^2+7}}$

e) $\lim \dfrac{2\cdot 4^{n+1} - 5^{n+2}}{5^n - 4^n}$ f) $\lim \dfrac{2^{2n+1} - 3^{2n+2}}{5^{n+4} + 9^n}$ g) $\lim\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}\right)\right)$ h) $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+3} - \sqrt{n^2+2n}\right)$.

8. Dla podanych niżej ciągów znaleźć granicę $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$: a) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $a_n = \dfrac{3^n \cdot n^n}{n!}$ c) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}$.

9. Dana jest funkcja: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x^2}{(x-1)^2} + \dfrac{x^3}{(x-1)^3} - \ldots$, której prawa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Znaleźć dziedzinę tej funkcji i dla $x \in D$ podać jawną postać $f(x)$.

10. Rozwiązać nierówność: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots > -1 - x$.