

FUNKCJA ZŁOŻONA, FUNKCJA ODWROTNA.

- Dane są funkcje określone wzorami: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $k(u) = 1 + u^2$, $h(t) = \operatorname{tg} t$. Znaleźć wzór funkcji złożonej:
 - $f \circ k \circ h$
 - $k \circ h \circ f$.
 Obliczyć wartości: a) $f \circ h\left(\frac{\pi}{3}\right)$ oraz b) $f \circ h \circ k\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}-1}\right)$.
- Niech $f(x) = x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$. Znaleźć wzory funkcji: $g \circ f(x)$ i $f \circ g(x)$. Czy złożenie funkcji jest operacją przemienną?
- Niech $h(x) = x^3 + x - 3$, $f(x) = x + 2$. Wiadomo, że $h = g \circ f$, czyli $h(x) = g(f(x))$ dla każdego x . Znaleźć wzór funkcji $g(x)$.
- Wykazać, że: a) złożenie funkcji malejącej z rosnącą jest funkcją malejącą, b) złożenie funkcji malejącej z malejącą jest funkcją rosnącą.
- Dla podanych funkcji znaleźć wzór odwrotnej: a) $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{x-1}}$ c) $f(x) = 10^{3x^2+1}$
 - $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$
 - $f(x) = \frac{2 \cdot e^x - 3}{e^x}$
 - $f(x) = \log_3(\sqrt{x} + 1)$
 - $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$
 - $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$
 - $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
 - $f(x) = 4\operatorname{ctg}(x^3 + 1)$
 - $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x+2}$.
- Obliczyć wartość: a) $\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2} \sqrt{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-\sqrt{3}) - 3 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc} \operatorname{ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1$
 - $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\cos\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
 - $\operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\operatorname{tg} \frac{7}{8} \pi\right)$
 - $\arccos\left(\sin \frac{15}{7} \pi\right)$.
- Określić dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ b) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$ c) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)}{\log(x^2 + 2x - 3)}$.

GRANICA FUNKCJI, ASYMPTOTY, CIĄGŁOŚĆ.

- Obliczyć granice:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 14x + 12}{x^3 - x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2 - 8x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^4 - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-2}}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sin 5x - \sin 4x}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{sin} \frac{1-x}{1+x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 2^{7x}}{2x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 4x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \left((3^{2x} - 3^x) \cdot \operatorname{ctg} x\right)$.
- Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji: a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ b) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \frac{3}{e - e^x}$.

- Z badać, czy istnieje taka wartość parametru p , taka, żeby dana funkcja była ciągła na swojej dziedzinie:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{dla } x \geq 0, x \neq 1 \\ p & \text{dla } x = 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ p & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{x-3} & \text{dla } x < 3 \\ p & \text{dla } x = 3 \\ \pi + 2e^{-\frac{1}{(x-3)^2}} & \text{dla } x > 3 \end{cases} .$$