

UPRASZCZANIE WYRAŻEŃ, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

1. Sprowadzić do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $(x + \sqrt{2})^4 - (x - \sqrt{2})^4$ b) $\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ c) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)^{-1}$.

2. Rozwiązać równania: a) $\frac{6}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$ b) $\frac{3}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-2x+4}$ c) $\frac{1}{|3-x|} = \frac{2}{|2x-1|}$.

3. Rozwiązać nierówności:

a) $\frac{1}{x^3} \leq x$ b) $\frac{1}{x^3} \geq 1$ c) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{x-3}$ d) $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0$ e) $\frac{(x+8)^4(2-x)^3}{(x+5)(x-1)^2} \geq 0$ f) $\frac{3-2x}{(3x+1)(x-4)} \leq 0$.

FUNKCJE RZECZYWISTE, DZIEDZINA FUNKCJI.

1. Określić dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \sqrt{7+6x-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^3+5x^2-6x}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{10-2x}}{|x+2|-1}$ e) $f(x) = \frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} x}$ f) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ i) $f(x) = \frac{(\sqrt{3-x})^2}{2\log(1-x)}$

2. Narysować wykres funkcji: a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leq 1 \\ x+1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = |2x| - x + 1$ c) $f(x) = x^2 - |x|$

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x+1|}$

POTĘGI, LOGARYTMY, FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA.

1. Przypomnieć: a) własności działań na potęgach b) własności logarytmów.

2. Doprowadzić do najprostszej postaci: a) $\frac{2^4 \cdot 3^n - 2 \cdot 6^n - 2^2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n - 6^n}$ b) $\sqrt{8x^{-2}y^3} : \left[\left(\frac{x^2}{2y^{-1}} \right)^{-3} \right]^{\frac{1}{2}}$

4. Obliczyć: a) $\log^2 x$ b) $\log x^2$ dla: $x = 0,1$; $x = -0,001$, $x = 10000$, $x = \sqrt[5]{100}$, $x = 10^{\frac{4}{7}}$.

5. Obliczyć: a) $\log_6(3^3 + \log_2 8^3)^2$ b) $\log_{\sqrt[6]{\frac{3\sqrt{6}}{216}}}$ c) $1000^{\frac{1}{3} - \log \sqrt[3]{3}}$ d) $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$ e) $(\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2\log_3 2}}$.

6. Określić dziedzinę i narysować wykresy funkcji (dla $0 < a < 1$ i dla $a > 1$): a) $f(x) = a^x$ b) $f(x) = \log_a x$.

7. Uzasadnić, że funkcje $f(x) = \log x^2$ i $g(x) = 2\log x$ nie są tożsamościowo równe.

8. Znaleźć dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \sqrt{\ln(5-x)}$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ c) $f(x) = \frac{x^2-12x}{\sqrt{3-x}} + \log_4(6x-x^2-8)$.

9. Rozwiązać równania wykładnicze i logarytmiczne: a) $5^x - 5^{3-x} = 20$ b) $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$
c) $2^x + 3^x = 3^{x-1} + 2^{x+1}$ d) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(x+10) + \log_{\frac{1}{3}}(7-2x) = -4$ f) $x^{\log x} = 10$

g) $\log\left(\frac{1}{2} + x\right) = \log \frac{1}{2} - \log x$ h) $\log_2(9-2^x) = 3-x$ i) $\log_3 x + \log_5 x = \frac{\log 15}{\log 3}$ j) $10^{\log^2 x} + x^{\log x} = 20$.

10. Rozwiązać nierówności: a) $\left(\frac{9}{11}\right)^{9x^2-11x} \geq \left(\frac{11}{9}\right)^{11x^2-9x}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x-1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{8}}$ c) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$

d) $\log_2 x + \log_2(6-x) < 3$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \geq 0$ f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$ g) $8^{\log^2 x} - 2x^2 \geq x - 2$.