

MACIERZE, WYZNACZNIKI, UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH.

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Obliczyć iloczyny: $A \cdot A^T$ i $A^T \cdot A$. Uzasadnić, że dla każdej macierzy A takie iloczyny istnieją i że są to macierze kwadratowe.

2. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczyć wyznacznik $A^T \cdot B$.

3. Obliczyć wyznaczniki:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 7 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Korzystając z własności wyznaczników, sprowadzić następujący wyznacznik do jak najprostszej postaci (jak najwięcej zer, najmniej „x-ów”) a następnie rozwiązać nierówność:

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & x-2 & x-3 \\ 2x+1 & x-1 & x+2 \\ 3x+2 & x-1 & 2x+3 \end{vmatrix} > 0.$$

5. Wyznaczyć wszystkie wartości x , spełniające równanie:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & x & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy: a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sprawdzić wynik.

7. Znaleźć macierz X spełniającą poniższe równanie i sprawdzić wynik:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Rozwiązać i sprawdzić układy równań Cramera: a) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x + 3y - z = 0 \\ -2x - 3y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3u = -3 \\ 2x + y - 3u = 0 \\ -x - y = -1 \end{cases}$.