POCHODNA FUNKCJI . ZASTOSOWANIE POCHODNEJ.

1. Obliczyć pochodne funkcji : a) $f(x) = -2x^2 \cdot \sqrt{x} + 4 \cdot \sqrt[4]{x^5}$ b) $f(x) = \frac{2x^3 + 4x}{\sqrt{x^5}}$ c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

d) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ e) $f(x) = a^{x^b}$ f) $f(x) = (3x^2 + 5) \cdot \sqrt{\ln x}$ g) $f(x) = \operatorname{tg}^3(e^{3x})$ h) $f(x) = 3^{\frac{\ln x}{e^x}}$

i) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)} \cdot \ln^2 x$ j) $f(x) = \frac{(\cos x)^3}{e^{\operatorname{tg} 2x}}$ k) $f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}}{\sin^2 x} + \sqrt{x} \cdot \ln x$.

2. Znaleźć drugą pochodną funkcji, wynik przedstawić w najprostszej postaci:

a) $f(x) = x \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 4x}\right)$.

3. Sprawdzić, że podana niżej funkcja $y = f(x)$ spełnia dane obok równanie różniczkowe:

a) $y = \arcsin x$; $(1 - x^2)y'' = xy'$ b) $y = \sqrt{2x - x^2}$; $y^3 \cdot y'' = -1$

4. Stosując regułę de L`Hospitala, obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2\sin^2 x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x)^2$ e) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot e^{\frac{1}{x}})$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} [x(\operatorname{arc\,ctg} x - \pi)$ g) $\lim\limits_{x \to \infty} [x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)]$ h) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

5. Określić dziedzinę i znaleźć asymptoty funkcji: $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Narysować wykres.

6. Dla podanych niżej funkcji: a) wyznaczyć dziedzinę, przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, b) obliczyć miejsca zerowe, granice na krańcach przedziałów określoności (ew. asymptoty), zebrać dane w tabelce i narysować wykres funkcji:

a) $f(x) = xe^{-x^2}$ b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ c) $f(x) = x \ln x^2$ d) $f(x) = x \ln^2 x$ e) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

7. Napisać wzór Maclaurina funkcji $f(x) = e^x$ dla $n = 5$. Na podstawie tego wzoru obliczyć przybliżoną wartość liczby $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ i oszacować błąd przybliżenia.

8. Napisać wzór Maclaurina funkcji $f(x) = \ln(1 - x)$ dla $n = 6$. Wykorzystując ten wzór, obliczyć przybliżoną wartość liczby $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$, a następnie oszacować błąd przybliżenia.