Granica funkcji, asymptoty, ciągłość.

W [.] odpowiedzi.

1. Znaleźć granice (bez tw. Hospitala): a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-14x+12}{x^3-x}$ $[-5]$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-3x^2-x+3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^2-4}{x^4-6x^2+8}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2+x-5}{x^2-4x-5}$ $\left[\frac{13}{2}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+4x-4}{x^2+x-2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{x^4-x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}5x}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}6x)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{\sin 4x+\sin x}$ $[1]$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\log_2\frac{x^2-1}{x^4-1}$ $[-1]$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{3+2x-x^2}{2+2x^2}\right)$ $\left[\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{2}\right]$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3+x^2}{\sqrt{3}x^2}\right)$ $\left[\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}\right]$.

2. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji (ew. miejcsa zerowe i f(0)) i na tej podstawie narysować wykres:

a) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ [dziedzina: $x\neq -1, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=-1$, pozioma $y=1$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{0}{2}=0$]

b) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2-1}$ [dziedzina: $x\neq -1, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=-1$, poziomych nie ma, ukośna $y=x-3$]

c) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x^2+2x}$ [dziedzina: $x\neq -2, x\neq 0$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=2$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{-4}{2}=-2$]

d) $f(x)=\frac{x^4-2x}{3x^2-3x}$ [dziedzina: $x\neq 0, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=1$, poziomych i ukośnych nie ma].

e) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ [dziedzina: $x\neq -2, x\neq 2$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=1$].

3. Zbadać, czy istnieje taka wartość parametru p, taka, żeby dana funkcja była ciągła na swojej dziedzinie:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{dla } x\geq 0,\ x\neq 1\\ p & \text{dla } x=1\end{cases}$ [funkcja jest ciągła w x = 1 dla $p=\frac{1}{2}$].

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x} & \text{dla } x\geq -\frac{1}{2},\ x\neq 0\\ p & \text{dla } x=0\end{cases}$ [funkcja jest ciągła w x = 1 dla $p=\frac{1}{2}$].

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{dla } x\neq 0\\ p & \text{dla } x=0\end{cases}$ [nie ma takiego p, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, a $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{1}{2}$, granica nie istnieje].