Liczby zespolone.

1. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb, spełniających warunek:

a) $\mathrm{Re}[2+4i+(6-2i)z] \ge 2$ b) $\mathrm{Im}[2+4i+(6-2i)z] < 2$ c) $\left|\frac{1-i}{z-i}\right| > 2$ d) $\left|\frac{2\sqrt{2}+i}{z-3+3i}\right| \ge 1$

e) $\left|\frac{z-2-2i}{\sqrt{3}-i}\right| \le 1$ f) $\mathrm{Im}(z^2) = 2$ g) $|z-3+3i| \ge 3$.

2. Korzystając ze wzorów Moivre`a, obliczyć i doprowadzić wynik do postaci kartezjańskiej:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$ b) $(1-\sqrt{3}i)^{11}$ c) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^9$ d) $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^9$ e) $\left(\frac{2+2i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$ f) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^7$

3. Obliczyć wszystkie pierwiastki zespolone: a) trzeciego stopnia z liczby $z=-8$ b) szóstego st. z liczby $z=1$ Wyniki podać w postaci kartezjańskiej. Narysować pierwiastki na płaszczyźnie.

4. Na podstawie definicji obliczyć pierwiastki kwadratowe z liczb: a) $2i$ b) $-3+4i$ c) $5-12i$.

5. Rozwiązać równanie zespolone: a) $z^2+(-4+3i)z+3-3i=0$ b) $iz^2+(1-4i)z+1+5i=0$
c) $z^2+(-3+3i)z-2-6i=0$ d) $z^4 - i\cdot z^2+2=0$ e) $z^4-2z^2+4=0$.

Odpowiedzi i rozwiązania:

Zad. 1. a) Część płaszczyzny leżąca nad prostą $y=-3x$, razem z tą prostą.

b) Część płaszczyzny leżąca pod prostą $y=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x$, bez prostej.

c) Wnętrze koła (bez okręgu) $x^2+(y-1)^2<1$ (koło jest styczne do osi 0x w środku układu (0,0)), ale **bez środka koła**, bo $z \ne i$).

d) Koło z okręgiem o środku $S(3,-3)$ i prmieniu r = 3, styczne do obu osi w punktach (3, 0) i (0,-3), ale **bez środka koła**, bo $z \ne 3-3i$.

e) Koło $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 4$ łącznie z okręgiem.

f) Wykresem jest hiperbola $y=\frac{1}{x}$.

g) Zewnętrze koła : $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ - (środek (3, -3), r = 3) z okręgiem .
(Rysunki wykonać samodzielnie).

Zad. 2 a) i

b) $\left[2(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)\right]^{11} = 2^{11}\left(\cos\frac{55}{3}\pi + i\sin\frac{55}{3}\pi\right) = 2^{11}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{11}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1024+1024\sqrt{3}i$

c) $4^9 i$ d) $\frac{1}{32}+\frac{1}{32}i$ e) $\frac{(2\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4})}{2^{10}(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}^{10}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{32i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$\frac{64i}{-1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{64(-i+\sqrt{3})}{4} = 16\sqrt{3}-16i$ f) $-4+4\sqrt{3}+(4+4\sqrt{3})i$.

Zad.3 a) $w_1 = 1+\sqrt{3}i$, $w_2=-2$, $w_3 = 1-\sqrt{3}i$

b) $w_1=1$, $w_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $w_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_4=-1$, $w_5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $w_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zad.4. a) $w_1=1+i,\ w_2=-1-i$ b) $w_1=1+2i,\ w_2=-1-2i$

c) $z=5+12i$, $w^2=z,\ w=x+yi,\ |w|^2=|z|=\sqrt{5^2+12^2}=13$. Stąd $x^2+y^2=13,\ x^2-y^2=5,\ 2xy=12$.

Dodając stronami pierwsze dwa równania mamy: $2x^2=18,\ x_1=3,\ x_2=-3,\ y_1=2,\ y_2=-2$, czyli:

$w_1=3-2i,\ w_2=-3+2i$.

Zad. 5. : a) $z^2+(-4+3i)z+3-3i=0$ $\Delta=(-4+3i)^2-4(3-3i)=-5-12i$. Stąd pierwiastki z Δ, liczone jak w zad. 4 : $w_1=2-3i,\ w_2=-2+3i$, $z_1=\frac{4-3i+2-3i}{2}=3-3i,\ z_2=\frac{4-3i-2+3i}{2}=1$.

Odp: $z_1=3-3i,\ z_2=1$.

b) $iz^2+(1-4i)z+1+5i=0$, $\Delta=5-12i$, $w_1=3-2i,\ w_2=-3+2i$, $z_1=\frac{-1+4i+3-2i}{2i}=\frac{2+2i}{2i}=1-i$,

$z_2=\frac{-1+4i-3+2i}{2i}=\frac{-4+6i}{2i}=2+2i$. Odp: $z_1=1-i,\ z_2=2+2i$.

c) $z^2+(-3+3i)z-2-6i=0$, $\Delta=8+6i$, $w_1=3+i,\ w_2=-3-i$, $z_1=3-i,\ z_2=-2i$.

d) $z^4-i\cdot z^2+2=0$, $t^2-i\cdot t+2=0$, $t^2=z$, $t\in Z$, $\Delta=(-i)^2-8=-9$, $\sqrt{\Delta}=3i$, $t_1=2i,\ t_2=-i$.

Rozwiązaniami są cztery pierwiastki z t_1 i t_2, obliczone jak w zad.4: $z_1=1+i,\ z_2=-1-i,\ z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$,

$z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

e) $z^4-2z^2+4=0$, $t^2-2t+4=0$, $\sqrt{\Delta}=-12$, $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$ lub $\sqrt{\Delta}=-2\sqrt{3}i$, stąd $t_1=1-\sqrt{3}i,\ t_2=1+\sqrt{3}i$.

Obliczamy pierwiastki z t_1 i t_2: $z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.