

Macierze i wyznaczniki :

1. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć, jeśli istnieją, macierze

$C = A \cdot B^T$ i $D = A^T \cdot B$. Obliczyć wyznaczniki tych macierzy, i znaleźć, jeśli istnieją, macierze odwrotne: C^{-1} i D^{-1} .

2. Obliczyć wyznaczniki:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wartości x , spełniające równanie:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & x+3 & 1 \\ x+1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Znaleźć macierz X spełniającą poniższe równanie i sprawdzić wynik:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Rozwiązania wybranych zadań:

$$1. C = A \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}, \det C = \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-6) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -42 \cdot 1 = -42$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{42} \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, D = A^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ -9 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 17 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\det D = 0$, ponieważ dwa wiersze są proporcjonalne (1. i 4.). Oczywiście D^{-1} nie istnieje.

$$3. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3-x) \cdot (2-x) \cdot (1-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

$$b) \begin{vmatrix} 4 & 3 & x+3 & 1 \\ x+1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & x+2 & 1 \\ x & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & x+2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x+1 \end{vmatrix} = x^2 + 5x + 4, \text{ stąd } x^2 + 5x + 4 = 0,$$

czyli $x_1 = -4, x_2 = -1$.