Macierze i wyznaczniki :

1. Dane są macierze: $A=\begin{bmatrix}1&3&4&-1\\0&-2&1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&3&0&1\\3&5&-2&3\end{bmatrix}$. Znaleźć, jeśli istnieją, macierze $C=A\cdot B^T$ i $D=A^T\cdot B$. Obliczyć wyznaczniki tych macierzy, i znaleźć, jeśli istnieją, macierze odwrotne: C^{-1} i D^{-1}.

2. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix}1&1&-1&0\\3&-1&0&1\\6&2&1&-1\\3&-1&-2&1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}2&3&2&1&4\\0&1&0&1&2\\3&4&1&0&1\\2&0&1&5&2\\3&2&1&-1&-2\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}-2&1&-1&4&3\\0&-4&1&-1&2\\3&0&-1&4&1\\-1&1&-1&1&0\\1&2&-3&0&1\end{vmatrix}$.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości x, spełniające równanie:

a) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&5-x&2&2\\3&3&5-x&3\\4&4&4&5-x\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}4&3&x+3&1\\x+1&2&0&1\\3&4&x+2&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$

4. Znaleźć macierz X spełniającą poniższe równanie i sprawdzić wynik:

a) $\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}2&0\\5&1\\4&-2\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}7&-2&-1&0\\0&9&-3&-3\\4&3&-1&1\end{bmatrix}$ c) $X\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\\1&0\end{pmatrix}^T$

Rozwiązania wybranych zadań:

1. $C=A\cdot B^T=\begin{bmatrix}1&3&4&-1\\0&-2&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&3\\3&5\\0&-2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&7\\-6&-12\end{bmatrix}$, $\det C=\begin{vmatrix}7&7\\-6&-12\end{vmatrix}=7\cdot(-6)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-42\cdot 1$ =-42

$C^{-1}=-\frac{1}{42}\begin{bmatrix}-12&6\\-7&7\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{2}{7}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{7}&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$, $D=A^T\cdot B==\begin{bmatrix}1&0\\3&-2\\4&1\\-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&3&0&1\\3&5&-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&0&1\\-9&-1&4&-3\\-1&17&-2&7\\1&-3&0&-1\end{bmatrix}$.

det D = 0, ponieważ dwa wiersze są proporcjonalne (1. i 4.). Oczywiście D^{-1} nie istnieje.

3. a) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&5-x&2&2\\3&3&5-x&3\\4&4&4&5-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3-x&0&0\\0&0&2-x&0\\0&0&0&1-x\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3-x&0&0\\0&2-x&0\\0&0&1-x\end{vmatrix}=$

$=(3-x)\cdot(2-x)\cdot(1-x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=2, x_3=3.$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & x+3 & 1 \\ x+1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & x+2 & 1 \\ x & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & x+2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 3 & x+1 \end{vmatrix} = x^2+5x+4$, stąd $x^2+5x+4=0$, czyli $x_1=-4, x_2=-1$.

4. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $A\cdot X = B$, $\det A = -5$, $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, $X = A^{-1}\cdot B$, czyli

$X = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, więc $A\cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.