Powtórka - ciągi, granice, funkcje.

W [.] odpowiedzi.

1. Zbadać monotoniczność ciągu: a) $a_n = \dfrac{3^n - 4^n}{2^n}$ b) $a_n = \dfrac{3^n + 2}{6^n}$ c) $a_n = 3^n - 2^n$. Czy są to ciągi ograniczone? [a - malejący, nieograniczony, b - malejący, ograniczony: $0 \le a_n \le 1$, c -rosnący, nieograniczony].

2. Znaleźć granicę ciągu: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n + 12n^3 + 4}{4n^3 + n^2 - 3\cdot\sqrt{4n^6 - 1}}$ [-6] b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n + 2\sqrt{n^3 + 4n^2 - 2n}}{3n^2 - 12n}$ [0]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 6\cdot 4^{n+1}}{2^{2n+4} - 3\cdot 2^{n-1}}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+7} - 5\sqrt{n^6 + 3n}}{5n^3 + 2n^2 - 3n}$ [-1] e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}$ [-1]

f) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}\right)$ [2] g) $\lim\left(\sqrt{n^2+3}\left(\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2+4}\right)\right)$ [1] .

3. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, gdy : a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\left[\dfrac{1}{e}\right]$ b) $a_n = \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ $\left[\dfrac{e^2}{4}\right]$.

4. Niech $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sqrt[4]{x},\ h(x) = 1 + x^2$. Wyznaczyć wzor funkcji złożonej: a) $h(g(f(x)))$
b) $g(h(f(x)))$. Znaleźć wartość tych funkcji w punkcie $x = 0$. [a : $1 + \sqrt{\cos x}$, b : $\sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$] .

5. Niech $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x$. Znaleźć wzór funkcji złożonej $f \circ g(x)$, czyli $(f(g(x))$.

6. Niech $h(x) = 3x^4 + 7x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 1$, $h(x) = g(f(x))$. Znaleźć wzór funkcji $g(x)$.
[$g(x) = 3x^2 + x - 2$] .

7. Znaleźć wzór funkcji odwrotnej dla: a) $f(x) = \frac{1}{2}\log_3\left(2(x+1)\right)$ b) $f(x) = 2 + \frac{1}{2}\ln\left(x+1\right)$ [$f^{-1}(x) = e^{2x-4} - 1$]

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ [$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-e^x}$] d) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{2\cdot e^x}$ e) $f(x) = \dfrac{3e^x}{1 - e^x}$ f) $f(x) = \dfrac{e^{3x-4}}{2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ [$f^{-1}(x) = \mathrm{arctg} 4x - \frac{\pi}{2}$ g)] g) $f(x) = 2\ \arcsin\left(3x+1\right)$ h) $f(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

i) $f(x) = \dfrac{e^{3x-4}}{2}$ [$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln(2x) + \frac{4}{3}$] j) $f(x) = 4\cdot e^{\sqrt{x}} + 2$ k) $f(x) = 1 - \ln^2 x$ [$f^{-1}(x) = e^{\sqrt{1-x}}$] .

8. Obliczyć: a) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arc\,tg}\, 1\right)$ b) $\cos\left(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \arccos 0\right)$
c) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

9. Znaleźć dziedzinę funkcji : a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{x}\right)$ [$x \in (-\infty, -1)$] b) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$
c) $f(x) = \arccos\left(x+2\right) + \ln\left(9 - x^2\right)$ [$x \in (-3, -1]$] .

10. Znaleźć granice (bez tw. Hospitala): a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-14x+12}{x^3-x}$ $[-5]$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-3x^2-x+3}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^2-4}{x^4-6x^2+8}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-5x^2+x-5}{x^2-4x-5}$ $\left[\frac{13}{2}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+4x-4}{x^2+x-2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}5x}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}\,2x\cdot\mathrm{ctg}\,6x)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{\sin 4x+\sin x}$ $[1]$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{3+2x-x^2}{2+2x^2}\right)$ $\left[\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{2}\right]$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{3+x^2}{\sqrt{3}\,x^2}\right)$ $\left[\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}\right]$.

11. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji i na tej podstawie narysować wykres funkcji:

a) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ [dziedzina: $x\neq -1, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=-1$, pozioma $y=1$]

b) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x^2+2x}$ [dziedzina: $x\neq -2, x\neq 0$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=2$]

c) $f(x)=\frac{x^4-2x}{3x^2-3x}$ [dziedzina: $x\neq 0, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=1$, poziomych i ukośnych nie ma]

d) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ [dziedzina: $x\neq -2, x\neq 2$, asymptoty: pionowa $x=-2$, pozioma $y=1$]

e) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ [dziedzina: $x\neq -1, x\neq 1$, asymptoty: pionowa $x=-1$,ukośna : y = x (prawo- i lewostronna)].

12. Dana jest funkcja: $f(x)=\begin{cases}\frac{x-5}{x^2-25} & \text{dla } x\neq 5 \text{ i } x\neq -5\\ p & \text{dla } x=-5\\ s & \text{dla } x=5\end{cases}$. Znaleźć (jeśli istnieją) takie wartości parametrów p i s, dla których funkcja f jest ciągła.

[funkcja jest ciągła w $x=5$ dla $s=\frac{1}{10}$, ale nie istnieje p, dla którego f(x) byłaby ciągła w $x=-5$].