# 1. Ciągi liczbowe. W [ . ] odpowiedzi.

1. Zbadać monotoniczność poniższych ciągów. Czy są to ciągi ograniczone? Jeśli tak, to podać liczby ograniczające dany ciąg z dołu i z góry: a) $a_n = \frac{3^n - 4^n}{2^n}$ b) $a_n = \frac{3^n + 2}{6^n}$ c) $a_n = 3^n - 2^n$

d) $a_n = \frac{(2n)!}{n!}$ e) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ f) $a_n = \frac{2n-3}{n}$ g) $a_n = \frac{4^n}{n!}$ .

[a - malejący, nieograniczony, b - malejący, ograniczony: $0 \le a_n \le 1$, c -rosnący, nieograniczony, d - rosnący, nieograniczony, e - malejący , ograniczony: $0 \le a_n \le 1$, f - rosnący, ograniczony: $-1 \le a_n \le 2$, g - malejący dla $n \ge 4$, oganiczony: $0 \le a_n \le 12$ ].

2. Znaleźć granicę ciągu: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n + 12n^3 + 4}{4n^3 + n^2 - 3\cdot\sqrt{4n^6 - 1}}$ [ -6 ]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n + 2\sqrt{n^3 + 4n^2} - 2n}{3n^2 - 12n}$ [ 0, podzielić licznik i mianownik przez najwyższą potęgę mianownika]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 6\cdot 4^{n+1}}{2^{2n+4} - 3\cdot 2^{n-1}}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+7} - 5\sqrt{n^6 + 3n}}{5n^3 + 2n^2 - 3n}$ [ -1 ] e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}$ [ -1, postąpić jak w b)]

f) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}\right)$ [ 2 ] g) $\lim\left(\sqrt{n^2+3}\left(\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2+4}\right)\right)$ [ 1 ] .

3. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, gdy : a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$ b) $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ $\left[\frac{e^2}{4}\right]$ c) $a_n = \frac{(3n)!}{n^{3n}}$ $\left[\frac{27}{e^3}\right]$.

4. Wyznaczyć wartości x, dla których istnieje suma (nieskończonie wielu liczb): $1 + \log x + \log^2 x + \log^3 x + \ldots$ $\left[\frac{1}{10} < x < 10, \text{ bo } |\log x| < 1\right]$.

5. Rozwiązać równanie: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \frac{4}{3}$ $\left[x = \frac{2}{3}, \text{ ponieważ } |x| < 1 \text{ i } x = -2 \text{ odrzucamy}\right]$ .

6. Znaleźć dziedzinę i wzór funkcyjny dla $f(x) = 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \ldots$ $\left[D: x \in (-1,1),\ f(x) = \frac{2x^2}{1-x}\right]$.

# 2. Wielomiany, funkcje trygonometryczne, logarytmiczne i wykładnicze.

1. Znaleźć wielomian stopnia 3 o współczynnikach całkowitych posiadający pierwiastki: $x_1 = 5 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 5 + 2\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Czy istnieje wielomian stopnia piątego stopnia posiadający te i tylko te pierwiastki? $\left[W(x) = 2x^3 - 21x^2 + 44x - 17, \text{ dla piątego stopnia - np. pomnożyć } W(x)\cdot(2x-1)^2\right]$

2. Wykonać dzielenie wielomianu przez wielomian, zapisać wynik w postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, gdzie R(x) - reszta z dzielenia, oraz sprawdzić wynik:

a) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 20$ przez $x^2 - 6x$ b) $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 4x - 12$ przez $x^3 - 4x + 1$.

3. Rozwiązać równanie: a) $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$ $[x_1 = 1, x_2 = -5, x_3 = 2]$

b) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x = 0$ $[x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = -4]$ c) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ $[x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3]$.

4. Rozwiązać nierówność: a) $-x^3 - 3x + 1 \ge 0$ $[x \in (-\infty, 2] \cup \{1\}]$ b) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ $[x \in (-2,-1) \cup (1,2)]$.

5. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu przez wielomian:

a) $3x^3 - 4x^2 + x - 7$ przez $x - 1$ b) $2x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 1$ przez $x^2 - 1$.

[ w a): $W(x) = P(x)(x-1) + R$, więc dla $x = 1$ mamy $R = W(1) = 3 - 4 + 1 - 7 = -7$ , w b) $R(x) = ax + b$, więc $W(x) = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$, czyli $W(1) = a + b, W(-1) = -a + b$. Trzeba rozwiązać ten układ równań.]

6. Znaleźć wartości $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, dla : a) $\alpha=\frac{58}{8}\pi$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1,1\right]$,

b) $\alpha=\frac{44}{12}\pi$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ c) $\alpha=\frac{35}{3}\pi$ [tak samo] d) $\alpha=\frac{41}{6}\pi$ $\left[\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right]$

7. Obliczyć: a) $\cos\frac{53}{6}\pi+\sin\frac{71}{3}\pi$ $[-\sqrt{3}]$ b) $\sin\frac{59}{6}\pi-\cos\frac{58}{3}\pi$ [ 0 ].

8. Znaleźć: a) $\cos\alpha$, gdy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$ oraz $\alpha\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$ b) $\sin\alpha$, gdy $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{15}{8}$ oraz $\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$ $\left[-\frac{15}{17}\right]$.

9. Rozwiązać równanie:

a) $6\cos^2 x+7\sin x-1=0$ $[\,x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in C\,]$ b) $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$

c) $2\sin x=3\,\mathrm{ctg}x$ $[\,x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in C\,]$.

10. Obliczyć: a) $\log_6(\log 1000-\log 0{,}001)^2$ [2] b) $\log_3\left(\frac{1}{7}\cdot 6^{\log_6 21}\right)^4$ [1] c) $\log_2(\log 0{,}01+\log_5 125^2)$ [2]

d) $\log_3\left(\frac{1}{8}\cdot 7^{\log_7 24}\right)^3$ [3] e) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$ [64] .

11. Rozwiązać logarytmiczne: a) $\log_3(10\cdot 3^x-9)=2x$ $[\,10\cdot 3^x-9=3^{2x}$ oraz $3^x>\frac{9}{10}$, stąd $x_1=0,\ x_2=2\,]$

b) $\log_6(x+2)+\log_6(x-3)=1$ $[\,x^2-x-12=0$, stąd $x=4$, bo $x=-3$ odrzucamy ze wzgl. na dziedzinę: $x>3\,]$