Pochodne czastkowe i ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

1. Znaleźć pochodne cząstkowe (pierwszego rzędu) funkcji:

a) $f(x,y,z)=\sqrt{z}\cdot\cos(xy)+y\ln^2 x-z^y$ b) $f(x,y,z)=\sqrt{x}\cdot\ln(y^2+z^2)-y\sin x+y^z$
c) $f(x,y,z)=z^y-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ d) $f(x,y)=e^{xy}\cdot\cos(x+y)$ e) $f(x,y)=x^2y\cdot\ln(x^2+y^2)$
f) $f(x,y,z)=e^{xz}-y^{zx}$ g) $f(x,y)=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ h) $f(x,y,z)=z^x\cdot x^y-y^x\cdot z^y$

2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji i wykazać, że pochodne mieszane są równe:
a) $f(x,y)=y\cdot\sin(x^2+2y)$ b) $f(x,y)=x\cdot\ln(3x+y^2)$ c) $f(x)=y\cdot e^{x^2+2y}$ d) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$
e) $f(x,y)=y\cdot e^{x\cdot y}$ f) $f(x,y)=y\cdot\ln(x^2+y^2)$

3. Znaleźć ekstremum funkcji dwóch zmiennych: a) $f(x,y)=yx^2+2y^3+x^2+5y^2$ b) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$
c) $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy$ d) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ e) $f(x,y)=x^4+y^2-2xy$
f) $f(x,y)=x^3+y^2-2xy$ g) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$ h) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Odpowiedzi i rozwiązania wybranych zadań:

1. a) $f(x,y,z)=\sqrt{z}\cdot\cos(xy)+y\ln^2 x-z^y$; $f'_x=-\sqrt{z}\cdot y\cdot\sin(xy)+\frac{y}{x}\cdot 2\ln x$,

$f'_y=-\sqrt{z}\cdot x\cdot\sin(xy)+\ln^2 x-z^y\ln z$, $f'_z=\frac{\cos(xy)}{2\sqrt{z}}-yz^{y-1}$.

c) $f(x,y,z)=z^y-\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$; $f'_x=-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$ $f'_y=z^y\ln z-\frac{x}{x^2+y^2}$ $f'_z=yz^{y-1}$

d) $f(x,y)=e^{xy}\cdot\cos(x+y)$; $f'_x=ye^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$ $f'_y=xe^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$.

e) $f(x,y)=x^2y\cdot\ln(x^2+y^2)$; $f'_x=2xy\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3y}{x^2+y^2}$ $f'_y=x^2\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$

f) $f(x,y,z)=e^{xz}-y^{zx}$; $f'_x=ze^{xz}-zy^{zx}\cdot\ln y$ $f'_y=-zxy^{zx-1}$ $f'_z=xe^{xz}-xy^{zx}\cdot\ln y$

g) $f(x,y)=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$; $f'_x=y\cdot\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x}$ $f'_y=\ln\left(\frac{y}{x}\right)+y\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x}=\ln\left(\frac{y}{x}\right)+1$

2. a) $f(x,y)=y\cdot\sin(x^2+2y)$ $f'_x=2xy\cos(x^2+2y)$ $f'_y=\sin(x^2+2y)+2y\cos(x^2+2y)$

$f''_{xx}=2y\cos(x^2+2y)-4x^2y\sin(x^2+2y)$

$f''_{yy}=2\cos(x^2+2y)-2\cos(x^2+y)-4y\sin(x^2+2y)=4\cos(x^2+2y)-4y\sin(x^2+2y)$

$f''_{xy}=2x\cos(x^2+2y)-4xy\sin(x^2+2y)$ $f''_{yx}=2x\cos(x^2+2y)-4xy\sin(x^2+2y)$, więc $f''_{xy}=f''_{yx}$.

b) $f(x,y)=x\cdot\ln(3x+y^2)$ $f'_x=\ln(3x+y^2)+\frac{3x}{3x+y^2}$ $f'_y=\frac{2xy}{3x+y^2}$

$$f''_{xx}=\frac{3}{3x+y^2}+\frac{3(3x+y^2)-3x\cdot 3}{(3x+y^2)^2}=\frac{3}{3x+y^2}+\frac{3y^2}{(3x+y^2)^2}=\frac{9x+6y^2}{(3x+y^2)^2}$$

$$f''_{yy}=\frac{2x(3x+y^2)-2xy\cdot 2y}{(3x+y^2)^2}=\frac{6x^2+2xy^2-4xy^2}{(3x+y^2)^2}=\frac{6x^2-2xy^2}{(3x+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}=\frac{2y}{3x+y^2}-\frac{3x\cdot 2y}{(3x+y^2)^2}=\frac{6xy+2y^3-6xy}{(3x+y^2)^2}=\frac{2y^3}{(3x+y^2)^2}$$

$f''_{yx} = \dfrac{2y(3x+y^2)-2xy\cdot 3}{(3x+y^2)^2} = \dfrac{2y^3}{(3x+y^2)^2}$, więc $f''_{xy} = f''_{yx}$.

3. a) $f(x,y) = yx^2 + 2y^3 + x^2 + 5y^2 \quad f'_x = 2xy + 2x \quad f'_y = x^2 + 6y^2 + 10y$, $\begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 + 6y^2 + 10y = 0 \end{cases}$, stąd

$2x(y+1) = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ lub $y = -1$, co wstawiamy do drugiego równania: dla $x = 0 \quad 6y^2 + 10y = 0$,
dla y = -1 $\quad x^2 - 4 = 0$. Zatem są 4 punkty: $P_1(0,0), \quad P_2(0,-\frac{5}{3}), \quad P_3(-2,-1), \quad P_4(2,-1)$.
$f''_{xx} = 2y + 2 \quad f''_{yy} = 12y + 10$, $f''_{xy} = 2x$.

	$P_1(0,0)$	$P_2(0,-\frac{5}{3})$	$P_3(-2,-1)$	$P_3(2,-1)$
f''_{xx}	2	$-\frac{4}{3}$	0	0
f''_{yy}	10	-10	-2	-2
f''_{xy}	0	0	-4	4

$W(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 > 0$ jest minimum, $\quad W(0,-\frac{5}{3}) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \dfrac{40}{3} > 0$ jest maksimum,
$W(-2,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} < 0$ brak ekstremum, $W(2,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} < 0$ brak ekstremum . Zatem funkcja posiada minimum w $P_1(0,0)$ o wartości $f_{min} = 0$ oraz maksimum w $P_2(0,-\frac{5}{3})$ o wartości $f_{max} = \dfrac{125}{27}$. Innych ekstremów funkcja nie posiada.

c) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy \quad f'_x = 3x^2 - 6y \quad f'_y = 24y^2 - 6x$, $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$, stąd $y = \dfrac{x^2}{2}$ i
$6x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ lub $x = 1$, zatem są 2 punkty: $P_1(0,0), \quad P_2(1,\frac{1}{2})$. $f''_{xx} = 6x \quad f''_{yy} = 48y \quad f''_{xy} = -6 \quad f''_{yx} = -6$.

	$P_1(0,0)$	$P_2(1,\frac{1}{2})$
f''_{xx}	0	6
f''_{yy}	0	24
$f''_{xy} =$	-6	-6

$W(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$ brak ekstremum, $\quad W(1,\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 6\cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 36\cdot(4-1) > 0$ - jest minimum. Zatem funkcja posiada tylko jedno minimum w $P(1,\frac{1}{2})$ o wartości $f_{min} = -3$.

g) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$. Musimy założyć, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, zatem dziedziną funkcji jest płaszczyzna R^2 bez osi współrzędnych: $x = 0$ i $y = 0$. $f'_x = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}$, $f'_y = -\dfrac{x}{y^2} + 1$, stąd $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2} = 0$, i $-\dfrac{x}{y^2} + 1 = 0$. Zatem z drugiego równania $-\dfrac{x}{y^2} = -1$ i $x = y^2$, $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^4} = 0$, $y^3 = 1$, więc $y = 1, x = 1$. Jest jedyny punkt P(1, 1).
$f''_{xx} = \dfrac{2}{x^3} \quad f''_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$, $f''_{xy} = -\dfrac{1}{y^2}$, $f''_{yx} = -\dfrac{1}{y^2}$. $f''_{xx}(1,1) = 2 \quad f''_{yy}(1,1) = 2$, $f''_{xy}(1,1) = -1$.
$W(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, więc w P(1, 1) jest minimum o wartości $f_{min} = 3$. Jest to jedyne ekstremum lokalne.

h) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, $f'_x=4x^3-4x+4y$ $f'_y=4y^3+4x-4y$, $\begin{cases} x^3-x+y=0 \\ y^3+x-y=0 \end{cases}$, po dodaniu tych równań stronami otrzymujemy $x^3+y^3=0$, więc $x=-y$ i $x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$. Są 3 punkty: $P_1(0,0)$, $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $P_3(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$f''_{xx}=12x^2-4$ $f''_{yy}=12y^2-4$ $f''_{xy}=4$ $f''_{yx}=4$.

	$P_1(0,0)$	$P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$P_3(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
f''_{xx}	-4	20	20
f''_{yy}	-4	20	20
f''_{xy}	4	4	4

$W(0,0)=\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=16-16=0$ tw. nie rostrzyga o istnieniu ekstremum, $W(\sqrt{2},-\sqrt{2})=\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}=384>0$ - jest minimum, $W(-\sqrt{2},\sqrt{2})=\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}=384>0$ - jest minimum. Aby rostrzygnąć o istnieniu ekstremum w $P_1(0,0)$ obliczamy: $f(0,0)=0$ i podstawiamy kolejno: $y=0$, $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x-2)<0$ dla x bliskich $(0,0)$ oraz $y=x$, $f(x,x)=x^4+x^4-2x^2+4x^2-2x^2=2x^4>0$. Zatem dowolnie blisko $(0,0)$ funkcja przyjmuje wartości zarówno ujemne, więc mniejsze od $f(0,0)$ jak i dodatnie, więc większe od $f(0,0)$. Zatem w $P_1(0,0)$ nie ma ekstremum. Zatem funkcja ma dwa minima w punktach $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $P_3(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ o wartości $f_{min}=-8$. Innych ekstremów funkcja nie posiada.