Liczby zespolone.

1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć zbiór liczb, spełniających warunek:

a) $\mathrm{Re}(iz+2)=0$ b) $\mathrm{Re}[2+4i+(6-2i)z]\ge 2$ c) $\mathrm{Im}[2+4i+(6-2i)z]<2$ d) $|z-3+3i|\le 3$

e) $\left|\frac{1-i}{z-i}\right|>1$ f) $\left|\frac{2\sqrt{2}+i}{z-3+3i}\right|\le 1$ g) $\left|\frac{z-2-2i}{\sqrt{3}-i}\right|\le 1$ g) $\frac{4}{z}=\bar{z}$

2. Korzystając ze wzorów Moivre\`a, obliczyć i doprowadzić wynik do postaci kartezjańskiej:

a) $(1-\sqrt{3}i)^{11}$ b) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^9$ c) $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^9$ d) $\left(\frac{2+2i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

3. Obliczyć wszystkie pierwiastki zespolone: a) trzeciego stopnia z liczby -27
b) czwartego stopnia z liczby $z=1$ c) trzeciego stopnia z liczby $27i$. Narysować je na płaszczyźnie.

4. Na podstawie definicji obliczyć pierwiastki kwadratowe z liczb: a) $2i$ b) $-3+4i$ c) $5-12i$.

5. Rozwiązać równanie zespolone: a) $z^2+(-4+3i)z+3-3i=0$ b) $z^2+(-3+3i)z-2-6i=0$
c) $iz^2+(1-4i)z+1+5i=0$ d) $z^2+3z+4+6i=0$ e) $z^4-2z^2+4=0$ f) $z^4-i\cdot z^2+2=0$.

Odpowiedzi i rozwiązania:

Zad. 1. a) Prosta pozioma $y=-2$. b) Część płaszczyzny leżąca nad prostą $y=-3x$, razem z tą prostą.

c) Część płaszczyzny leżąca pod prostą $y=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x$, bez prostej.

d) Koło z okręgiem o środku $S(3,-3)$ i prmieniu r = 3, styczne do obu osi w punktach (3, 0) i (0,-3).

e) $x^2+(y-1)^2<1$ (koło jest styczne do osi 0x w środku układu (0,0)), ale **bez środka koła**, bo $z\ne i$).

f) Zewnętrze koła : $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ - (środek (3, -3), r = 3) z okręgiem

g) Koło $(x-2)^2+(y-2)^2\le 4$ łącznie z okręgiem.

h) Okrąg $x^2+y^2=4$ - środek (0, 0), r = 2. (Rysunki wykonać samodzielnie).

Zad. 2

a) $\left[2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)\right]^{11}=2^{11}\left(\cos\frac{55}{3}\pi+i\sin\frac{55}{3}\pi\right)=2^{11}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{11}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1024+1024\sqrt{3}i$

b) $4^9 i$ c) $\frac{1}{32}+\frac{1}{32}i$

d) $$\frac{(2\sqrt{2})^{10}(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4})}{2^{10}(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}^{10}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{32i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{64i}{-1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}=16\sqrt{3}-16i$$

Zad.3 a) $w_1=1+\sqrt{3}i$, $w_2=-2$, $w_3=1-\sqrt{3}i$

b) $w_1=1$, $w_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $w_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_4=-1$, $w_5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$, $w_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zad.4. a) $w_1=1+i, w_2=-1-i$ b) $w_1=1+2i, w_2=-1-2i$

c) $z=5+12i, w^2=z, w=x+yi, |w|^2=|z|=\sqrt{5^2+12^2}=13$. Stąd $x^2+y^2=13, x^2-y^2=5, 2xy=12$.

Dodając stronami pierwsze dwa równania mamy: $2x^2=18, x_1=3, x_2=-3, y_1=2, y_2=-2$, czyli:
$w_1=3+2i, w_2=-3-2i$.

Zad. 5. : a) $z^2+(-4+3i)z+3-3i=0$ $\Delta=(-4+3i)^2-4(3-3i)=-5-12i$. Stąd pierwiastki z Δ, liczone jak w zad. 4 : $w_1=2-3i,\ w_2=-2+3i$, $z_1=\dfrac{4-3i+2-3i}{2}=3-3i,\ z_2=\dfrac{4-3i-2+3i}{2}=1$.

Odp: $z_1=3-3i,\ z_2=1$.

b) $z^2+(-3+3i)z-2-6i=0$, $\Delta=8+6i$, $w_1=3+i,\ w_2=-3-i$, $z_1=3-i,\ z_2=-2i$.

c) $iz^2+(1-4i)z+1+5i=0$, $\Delta=5-12i$, $w_1=3-2i,\ w_2=-3+2i$, $z_1=\dfrac{-1+4i+3-2i}{2i}=\dfrac{2+2i}{2i}=1-i$,

$z_2=\dfrac{-1+4i-3+2i}{2i}=\dfrac{-4+6i}{2i}=2+2i$. Odp: $z_1=1-i,\ z_2=2+2i$.

e) $z^4-2z^2+4=0$, $t^2-2t+4=0$, $t\in Z$, $\sqrt{\Delta}=-12$, $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}\,i$ lub $\sqrt{\Delta}=-2\sqrt{3}\,i$, stąd $t_1=1-\sqrt{3}i,\ t_2=1+\sqrt{3}i$. Obliczamy pierwiastki z t_1 i t_2, jak w zad.4. Zatem:

$z_1=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

f) $z^4-i\cdot z^2+2=0$, $t^2-i\cdot t+2=0$, $t\in Z$, $\Delta=(-i)^2-8=-9$, $\sqrt{\Delta}=3i$, $t_1=2i,\ t_2=-i$. Rozwiązaniami są pierwiastki z t_1 i t_2: $z_1=1+i,\ z_2=-1-i,\ z_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.