Zadania - pochodne, zastosowania pochodnych.

1. Obliczyć pochodne: a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1+\cos^3 x}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}\cdot\ln^3 x$ c) $f(x)=\dfrac{e^{-x^3}}{\operatorname{tg}^2 4x}$ d) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^2}\cdot\operatorname{tg}^3 x$ f) $f(x)=\dfrac{\sin^4 x}{\operatorname{arcctg}(x^3)}$ g) $f(x)=\sqrt{\ln x}\cdot(3x^2+5)$ h) $f(x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{4+\sin x}}$

i) $f(x)=(2+\ln^2 x)\cdot(\operatorname{ctg}\sqrt{x})$ j) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sin^2 x}+\sqrt{x}\cdot\ln x$ k) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{ctg}2x}$ l) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}-\dfrac{1}{\ln^3 x}$

m) $f(x)=\dfrac{\cos^2 2x}{\sqrt{4+x^6}}$ n) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ o) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{x^2+6}\right)$ p) $f(x)=\dfrac{(\cos x)^3}{e^{\operatorname{tg}2x}}$

r) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg}2x}$ s) $f(x)=3^{\frac{\ln x}{e^x}}$ t) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}}{\sin^2 x}$.

2. Obliczyć drugą pochodną funkcji (wynik w najprostszej postaci) : a) $f(x)=\operatorname{tg} x$ b) $f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x$ d) $f(x)=\operatorname{arctg} e^{2x}$ e) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2x-5}\right)$.

3. Sprawdzić, że funkcja $y=y(x)$ spełnia podane obok równanie: a) $y=\dfrac{x-5}{x+2}$; $2(y')^2=(y-1)\cdot y''$

b) $y=\sin e^x$; $y'-y''=e^{2x}y$ c) $y=e^{\sqrt{x}}$; $4xy''=y-2y'$ d) $y=\sqrt{2x-x^2}$; $y^3\cdot y''=-1$.

4. Korzystając z tw. L`Hospitala, znaleźć granicę (w ramce [.] są odpowiedzi): a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-e^x-e^{-x}}{\cos x-1}$ $[2]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^x-e^{-x}}$ $[\frac{1}{2}]$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4 e^{-x^4})$ $[0]$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln^2 x)$ $[0]$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$ $[0]$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{2\operatorname{arc\,tg} x-\pi}$ $[0]$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\cdot e^{-3x})$ $[0]$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{\sin 4x}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{2\operatorname{arc\,tg} x-\pi}$ $\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{2\operatorname{arc\,tg} x-\pi}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{-x}}{\frac{2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-(1+x^2)}{2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{2e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\right]$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ $[\ \infty^0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}},\ \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}=[\dfrac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=[\dfrac{0}{0}]=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{1}=0$, więc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=e^0=1]$.

5. Znaleźć dziedzinę, przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji (ew. obliczyć granice i narysować wykres):

a) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$ b) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+5\ln(x+6)$ e) $f(x)=x^2 e^{-x^2}$.

Rozwiązania wybranych zadań:

1. a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{1+\cos^3 x}$ $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{1+x^4}(1+\cos^3 x)+3\operatorname{arctg}x^2\cdot\cos^2 x\sin x}{2(1+\cos^3 x)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{e^{-x^3}}{\mathrm{tg}^2 4x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{-e^{-x^3}\left(3x^2\cdot \mathrm{tg}4x+\dfrac{8}{\cos^2 4x}\right)}{\mathrm{tg}^3 4x}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{(x-5)^2}\cdot \mathrm{tg}^3 x$ $\quad f'(x)=\dfrac{2\mathrm{tg}^3 x}{3\cdot\sqrt[3]{x-5}}+\dfrac{3\mathrm{tg}^2 x\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}}{\cos^2 x}$

g) $f(x)=\sqrt{\ln x}\cdot(3x^2+5)$, $\quad f'(x)=\dfrac{3x^2+5}{2x\sqrt{\ln x}}+\sqrt{\ln x}\cdot 6x$

k) $f(x)=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\mathrm{ctg}\,2x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{-1}{(1+\mathrm{ctg}2x)\sqrt{\mathrm{ctg}2x}\cdot\sin^2 2x}$

l) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)}-\dfrac{1}{\ln^3 x}$, $\quad f'(x)=\dfrac{2\sin x\cos x\cdot\ln(\cos x)+\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}}{\ln^2(\cos x)}+\dfrac{3}{x\ln^4 x}$

s) $f(x)=3^{\frac{\ln x}{e^x}}$ $\quad f'(x)=3^{\frac{\ln x}{e^x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}e^x-\ln x\cdot e^x}{e^{2x}}=3^{\frac{\ln x}{e^x}}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$

2. a) $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ $\quad f''(x)=\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)'=-2\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

c) $f(x)=x\cdot\mathrm{arctg}\,x$, $\quad f'(x)=\mathrm{arctg}\,x+\dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad f''(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$.

d) $f(x)=\mathrm{arctg}\,e^{2x}$, $f''(x)=\dfrac{4e^{2x}-4e^{6x}}{(1+e^{4x})^2}$ $\qquad$ e) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2x-5}\right)$, $\quad f''(x)=\dfrac{-x^2-2x-7}{(x^2+2x-5)^2}$.

3. c) $y=e^{\sqrt{x}}$, $4xy''=y-2y'$; $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $y''=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot 4x}$, $L=4xy''=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

$P=y-2y'=e^{\sqrt{x}}-\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, czyli $L=P$.

d) $y=\sqrt{2x-x^2}$; $y^3\cdot y''=-1$; $\quad y''(x)=\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)'=\dfrac{-1}{(2x-x^2)\cdot\sqrt{2x-x^2}}$;

$L=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3\cdot\dfrac{-1}{(2x-x^2)\cdot\sqrt{2x-x^2}}=-1$, czyli $L=P$.

5. b) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; $\quad D: x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln^2 x}{x^4}=\dfrac{2x\ln x(1-\ln x)}{x^4}$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ lub $x=e$,

x	(0,1)	1	(1,e)	e	(e,+∞)
f′(x)	–	0	+	0	–
f(x)	maleje	min	rośnie	max	maleje

$f_{min}=f(1)=0$, $f_{max}=f(e)=\dfrac{1}{e^2}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}=0$ (granice służą do narysowania wykresu).

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+5\ln(x+6)$ $\quad D: x\in(-6,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{x^2+6x+5}{x+6}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-5$ lub $x=-1$,

x	(-6,-5)	-5	(-5,-1)	-1	(−1,+∞)
f′(x)	+	0	-	0	+

$f(x)$	rośnie	max	maleje	min	rośnie

$f_{max} = f(-5) = \frac{25}{2}$; $f_{min} = f(-1) = \frac{1}{2} + 5\ln 5$, $\lim_{x\to -6} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

e) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, $D: x \in R$, $f'(x) = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} 2x(1-x^2)$,
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ lub $x = 1$ lub $x = 0$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	_	0	+	0	_
$f(x)$	rośnie	max	maleje	min	rośnie	max	maleje

$f_{min} = f(0) = 0$, $f_{max} = f(-1) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = 0$,

$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.