Macierze odwrotne i układy równań :

1. Znaleźć macierz X spełniającą poniższe równanie i sprawdzić wynik:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$] c) $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

2. Rozwiązać układy równań: a) $\begin{aligned} x-5y+4z+u&=2 \\ 3x-3y+2z+3u&=4 \\ 2x-4y+3z+2u&=3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+2y+5z&=2 \\ x-y-z&=0 \\ 3x+2y+7z&=2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x+y-4z&=-3 \\ -2x-2y+8z&=6 \\ 5x+5y-20z&=-15 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x+y+z&=-1 \\ 2x-y+z&=2 \\ 5x-y+3z&=3 \\ 7x-2y+4z&=5 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x-2y+z&=0 \\ 4x-8y+2z&=-2 \\ x-2y+3z&=2 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x+y+2z&=2 \\ 2x+2y+z&=1 \\ 2x-y+2z&=5 \\ 4x+y+4z&=7 \end{aligned}$ g) $\begin{aligned} x+y-z\phantom{{}+u}&=0 \\ 3x-y\phantom{{}+2z}+u&=0 \\ x-3y+2z+u&=0 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 5x+3y+2z\phantom{{}+t}&=0 \\ -5x-y-5z+t&=0 \\ -2x\phantom{{}-y}-7z+5t&=0 \end{aligned}$ k) $\begin{aligned} y+z+3t&=0 \\ 2x+y-z-3t&=0 \\ x-2y+z+2t&=0 \\ 2x+3y+z+3t&=0 \end{aligned}$.

Rozwiązania wybranych zadań:

1. b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$, $\det A = -9$, $A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$,

$$X = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -20+2+9 & -16-2-9 & 24+3-27 \\ -5-20+7 & -4+20-7 & 6-30-21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzenie: $X \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

5. b) $\begin{aligned} x+2y+5z&=2 \\ x-y-z&=0 \\ 3x+2y+7z&=2 \end{aligned}$ Metodą Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} \end{array}\right]$$

Trzeci wiersz pokazuje, że układ jest sprzeczny - brak rozwiązań.

e) $\begin{aligned} x-2y+z&=0\\ 4x-8y+2z&=-2\\ x-2y+3z&=\ 2\end{aligned}$ Przez obliczanie rzędów: $\begin{bmatrix}1&-2&1\\4&-8&2\\1&-2&3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&1\\4&2\\1&3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&1\\2&0\\-2&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&1\\2&0\\0&0\end{bmatrix}$, R(A) = 2.

$$U=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\4&-8&2&-2\\1&-2&3&2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&1&0\\4&2&-2\\1&3&2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&1&0\\4&2&-2\\5&5&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\ R(U)=2.$$

Pierwsza i druga kolumna są proporcjonalne, więc wybierając wyznacznik należy jedną z nich pominąć.

$W=\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}=2-4=-2$, stąd: $\begin{aligned}x+z&=2y\\4x+2z&=-2+8y\end{aligned}$ $W_x=\begin{vmatrix}2y&1\\-2+8y&2\end{vmatrix}=4y+2-8y=-4y+2$

$W_z=\begin{vmatrix}1&2y\\4&-2+8y\end{vmatrix}=-2+8y-8y=-2$, czyli $x=\frac{W_x}{W}=2y-1,\ y\in R,\ z=\frac{W_z}{W}=1,$ co potwierdza sprawdzenie.

k) $\begin{aligned} y+z+3t&=0\\ 2x+y-z-3t&=0\\ x-2y+z+2t&=0\\ 2x+3y+z+3t&=0\end{aligned}$ Metodą Gaussa: $\begin{bmatrix}0&1&1&3\\2&1&-1&-3\\1&-2&1&2\\2&3&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_2+w_1\\w_3-w_1\\w_4-w_1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&1&1&3\\2&2&0&0\\1&-3&0&-1\\2&2&0&0\end{bmatrix}$

$$\approx\begin{bmatrix}0&1&1&3\\1&1&0&0\\1&-3&0&-1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}w_3-w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&3\\1&1&0&0\\0&-4&0&-1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}w_1+3w_3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&-11&1&0\\1&1&0&0\\0&-4&0&-1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0&-11&1&0\\1&1&0&0\\0&4&0&1\end{bmatrix}.$$

Stąd y jest parametrem, bo druga kolumna jest niewyzerowana, więc: $x=-y,\ z=11y,\ t=-4y,\ y\in R.$ Co potwierdza sprawdzenie.