

## Równania różniczkowe.

1. Rozwiązać równanie o rozdzielonych zmiennych: a)  $y' = -y \cdot \sin x$  b)  $y' - \frac{xy}{x^2 + 1} = 0$ .
2. Znaleźć całki szczególne równań (rozdzielone zmienne), spełniające podane obok warunki początkowe:  
a)  $y' - \frac{xy}{x^2 + 2} = 0$ ,  $y(2) = 2$  b)  $(x^2 - 2)y' - 2xy = 0$ ,  $y(0) = -2$  c)  $y' + y \operatorname{tg} x = y$ ,  $y(\pi) = 2$ .
3. Rozwiązać poniższe równania, stosując podstawienie  $u = \frac{y}{x}$ , sprowadzające te równania do rozdzielonych zmiennych: a)  $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$  b)  $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$  c)  $xy' = y + e^x$
4. Rozwiązać równanie liniowe: a)  $y' - 2xy = x$  b)  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$  c)  $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = x+1$   
d)  $y' \cos x - y \sin x = 1$
5. Znaleźć całkę szczególną  $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \sin 2x$  spełniającą warunek  $y(0) = 1$ .

### Rozwiązania niektórych zadań:

2. b)  $(x^2 - 2)y' - 2xy = 0$   $y' - \frac{2xy}{x^2 - 2} = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - 2}$ ,  $\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 - 2} dx$ , po scałkowaniu:

$\ln|y| = \ln|x^2 - 2| + \ln|C|$ ,  $y = C(x^2 - 2)$ . Z warunku pocz.:  $-2 = C(0 - 2)$ , więc  $C = 1$ . Szukaną całką jest:  
 $y = x^2 - 2$ .

3. a)  $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ ,  $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$ , podstawienie:  $u = \frac{y}{x}$ ,  $y' = u + u'x$ ,

$u + u'x = u + \sqrt{1 - u^2}$ ,  $\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - u^2}$ ,  $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x}$ , stąd  $\arcsin u = \ln|Cx|$ , więc  $y = x \sin \ln|Cx|$  jest rozwiązaniem ogólnym.

4. c)  $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = x+1$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-1}$ ,  $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1} dx$ ,  $\ln|y| = \ln|x^2-1| + \ln|C|$ ,  $y = C(x^2-1)$ .

Uzmienniamy stałą:  $y = D(x)(x^2 - 1)$ ,  $y' = D'(x)(x^2 - 1) + D(x) \cdot 2x$ . Wstawiamy do równania:

$$D'(x)(x^2 - 1) + D(x) \cdot 2x + \frac{2x \cdot D(x)(x^2 - 1)}{1 - x^2} = x + 1, D'(x)(x^2 - 1) = x + 1, D'(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, D'(x) = \frac{1}{x-1},$$

$$D(x) = \ln|x-1| + C, \text{ stąd } y = C(x^2 - 1) + \ln|x-1| \cdot (x^2 - 1).$$

5.  $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \sin 2x$ , najpierw znajdujemy rozwiązanie ogólne. Równanie jednorodne:  $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$ ,

$$y' = -\operatorname{tg} x \cdot y, \frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x dx, \int \frac{dy}{y} = \int (-\operatorname{tg} x dx), \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|, \ln|y| = \ln|C \cdot \cos x|, y = C \cos x.$$

Uzmienniamy stałą:  $y = D(x) \cos x$ ,  $y' = D'(x) \cos x - D(x) \cdot \sin x$ . Wstawiamy do równania:

$$D'(x) \cos x - D(x) \cdot \sin x + \operatorname{tg} x \cdot D(x) \cos x = \sin 2x, D'(x) \cos x = \sin 2x, \text{ ale } \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \text{ więc}$$

$$D'(x) \cos x = 2 \sin x \cos x, \text{ stąd } D(x) = 2 \int \sin x dx, D(x) = -2 \cos x + C, \text{ zatem } y = (-2 \cos x + C) \cos x,$$

rozwiązaniem ogólnym jest  $y = C \cos x - 2 \cos^2 x$ . Warunek początkowy:  $y(0) = 1$ , czyli  $x = 0, y = 1$ ,

$$1 = C \cos 0 - 2 \cos^2 0, C = 1 + 2 \cos^2 0, C = 3. \text{ Szukana całka: } y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x.$$