Równania różniczkowe.

1. Rozwiązać równanie o rozdzielonych zmiennych: a) $y' = -y \cdot \sin x$ b) $y' - \frac{xy}{x^2+1} = 0$.

2. Znaleźć całki szczególne równań (rozdzielone zmienne), spełniające podane obok warunki początkowe:
a) $y' - \frac{xy}{x^2+2} = 0$, $y(2) = 2$ b) $(x^2-2)y' - 2xy = 0$, $y(0) = -2$ c) $y' + y \operatorname{tg} x = y$, $y(\pi) = 2$.

3. Rozwiązać poniższe równania, stosując podstawienie $u = \frac{y}{x}$, sprowadzające te równania do rozdzielonych zmiennych: a) $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ b) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ c) $xy' = y + e^{\frac{y}{x}}$

4. Rozwiązać równanie liniowe: a) $y' - 2xy = x$ b) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ c) $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = x+1$
d) $y'\cos x - y\sin x = 1$

5. Znaleźć całkę szczególną $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \sin 2x$ spełniającą warunek $y(0) = 1$.

Rozwiązania niektórych zadań:

2. b) $(x^2-2)y' - 2xy = 0$ $y' - \frac{2xy}{x^2-2} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-2}$, $\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2-2}dx$, po scałkowaniu:
$\ln|y| = \ln|x^2-2| + \ln|C|$, $y = C(x^2-2)$. Z warunku pocz.: $-2 = C(0-2)$, więc $C = 1$. Szukaną całką jest:
$y = x^2 - 2$.

3. a) $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$, $y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}$, $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$, podstawienie: $u = \frac{y}{x}$, $y' = u + u'x$,
$u + u'x = u + \sqrt{1-u^2}$, $\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1-u^2}$, $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x}$, stąd $\arcsin u = \ln|Cx|$, więc $y = x \sin \ln|Cx|$ jest rozwiązaniem ogólnym.

4. c) $y' + \frac{2xy}{1-x^2} = x+1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-1}$, $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2-1}dx$, $\ln|y| = \ln|x^2-1| + \ln|C|$, $y = C(x^2-1)$.
Uzmienniamy stałą: $y = D(x)(x^2-1)$, $y' = D'(x)(x^2-1) + D(x) \cdot 2x$. Wstawiamy do równania:
$D'(x)(x^2-1) + D(x) \cdot 2x + \frac{2x \cdot D(x)(x^2-1)}{1-x^2} = x+1$, $D'(x)(x^2-1) = x+1$, $D'(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, $D'(x) = \frac{1}{x-1}$,
$D(x) = \ln|x-1| + C$, stąd $y = C(x^2-1) + \ln|x-1| \cdot (x^2-1)$.

5. $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \sin 2x$, najpierw znajdujemy rozwiązanie ogólne. Równanie jednorodne: $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$,
$y' = -\operatorname{tg} x \cdot y$, $\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx$, $\int \frac{dy}{y} = \int (-\operatorname{tg} x\, dx)$, $\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|$, $\ln|y| = \ln|C \cdot \cos x|$, $y = C\cos x$.
Uzmienniamy stałą: $y = D(x)\cos x$, $y' = D'(x)\cos x - D(x) \cdot \sin x$. Wstawiamy do równania:
$D'(x)\cos x - D(x) \cdot \sin x + \operatorname{tg} x \cdot D(x)\cos x = \sin 2x$, $D'(x)\cos x = \sin 2x$, ale $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, więc
$D'(x)\cos x = 2\sin x \cos x$, stąd $D(x) = 2\int \sin x\, dx$, $D(x) = -2\cos x + C$, zatem $y = (-2\cos x + C)\cos x$,
rozwiązaniem ogólnym jest $y = C\cos x - 2\cos^2 x$. Warunek początkowy: $y(0) = 1$, czyli $x = 0, y = 1$,
$1 = C\cos 0 - 2\cos^2 0, C = 1 + 2\cos^2 0$, $C = 3$. Szukana całka: $y = 3\cos x - 2\cos^2 x$.