

Szeregi liczbowe i potęgowe.

1. Stosując kryteria zbieżności zbadać zbieżność szeregu:

d'Alemberta: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^n \cdot (2n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (n!)^2}{n^{2n}}$,

Cauchy'ego: f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{4^n n^{n^2}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2. Zbadać, czy poniższy szereg jest zbieżny bezwzględnie, czy warunkowo: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(-2)^n}$.

3. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

4. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)} \cdot x^n}{4^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(-2)^n \cdot \sqrt{n}}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^n}{(-3)^n}$.

5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję: a) $f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$ b) $f(x) = \frac{9}{9+x}$ c) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

d) $f(x) = \frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}$ e) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ f) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

Rozwiązania wybranych zadań:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$, kryterium d'Alemberta: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2n} (n+1)^2 (2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n^{2n}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n+2} = e^2 \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2 > 1$, szereg rozbieżny.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^n \cdot (2n)!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{8} < 1$, szereg zbieżny.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{e^3} = \left(\frac{3}{e}\right)^3 > 1$, szereg rozbieżny.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{4^n n^{n^2}}$, kryterium Cauchy'ego: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{(n+1)^n}{4 \cdot n^n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{4 \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4} < 1$,
szereg jest zbieżny.

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$, kryterium d'Alemberta: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3 \cdot 3^n} \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{3}$,
zatem szereg jest bezwzględnie zbieżny.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$;

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n^n (n+1)!}{e^n} \cdot \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{e \cdot e^n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot e =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot e = e^{-1} \cdot e = 1$$

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot \sqrt{n}}$, $r = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{2^{n+1} \sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n}} = 2$, zbieżność bezwzględna w $(-2, 2)$.

Dla $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ rozbieżny, dla $x = -2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (przemienne) zbieżny.

Zatem przedział zbieżności: $[-2, 2)$.

4. b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)} \cdot x^n}{4^n}$, $r = 4$, zbieżność bezwzględna w $(-4, 4)$. Dla $x = 4$ i dla $x = -4$ rozbieżny.

Zatem przedział zbieżności: $(-4, 4)$.

4. d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{n^2}$, $r = 1$, dla $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - szereg zbieżny,

dla $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ - szereg (przemienne) zbieżny, zatem przedział zbieżności: $[-1, 1]$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^n}{(-3)^n}$. Przedział zbieżności: $(-3, 3)$.

5. d) $f(x) = \frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}$, $f(x)$ rozkładamy na ułamki proste: $\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)} = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{1+4x} =$

$2 \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-(-4x)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-4)^n) x^n$. Przedział zbieżności jest wspólną częścią

przedziałów obu szeregów, zatem $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.