# Szeregi liczbowe i potęgowe.

1. Stosując kryteria zbieżności zbadać zbieżność szeregu:

d'Alemberta: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{2^n\cdot(2n)!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n^{3n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot(n!)^2}{n^{2n}}$ ,

Cauchy'ego: f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{4^n n^{n^2}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

2. Zbadać, czy szereg jest zbieżny bezwzględnie, czy warunkowo: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(-2)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-3n}{4n+3}\right)^n$ .

3. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ .

4. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}\cdot x^n}{4^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n^2}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(-2)^n\cdot\sqrt{n}}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot x^n}{(-3)^n}$ .

5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję: a) $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$ b) $f(x)=\frac{9}{9+x}$ c) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

d) $f(x)=\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}$ e) $f(x)=x^2\cdot e^x$ f) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ g) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ .

# Rozwiązania wybranych zadań:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$, kryterium d'Alemberta: $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n^{2n}}=\lim\frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n^{2n}}=$

$=\lim\frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}\cdot\frac{n+1}{2(2n+1)}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\lim\frac{n+1}{4n+2}=e^2\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{e}{2}\right)^2>1$, szereg rozbieżny.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{2^n\cdot(2n)!}$, $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e^2}{8}<1$, szereg zbieżny.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n^{3n}}$, $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{27}{e^3}=\left(\frac{3}{e}\right)^3>1$, szereg rozbieżny.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{4^n n^{n^2}}$, kryterium Cauchy'ego: $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[n]{\left(\frac{(n+1)^n}{4\cdot n^n}\right)^n}=\lim\frac{(n+1)^n}{4\cdot n^n}=\lim\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{4}<1$,

szereg jest zbieżny.

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(-3)^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$, kryterium d'Alemberta: $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\sqrt{n+1}}{3\cdot 3^n}\cdot\frac{3^n}{\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{3}$,

zatem szereg jest bezwzględnie zbieżny.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-3n}{4n+3}\right)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^n$, kryterium Couchy'ego: $\lim\sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{4n+3}\right)^n}=\lim\frac{3n-2}{4n+3}=\frac{3}{4}<1$,

co oznacza zbieżność, zatem szereg jest bezwzględnie zbieżny.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$ ;

$$r=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\frac{1}{n!}\cdot\frac{n^n}{e^n}\frac{(n+1)!}{1}\cdot\frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim\frac{(n+1)n!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)}\cdot\frac{e\cdot e^n}{e^n}=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot e=$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot e=e^{-1}\cdot e=1$$

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$, $r=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n}}=2$, zbieżność bezwzględna w (-2, 2).

Dla $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ rozbieżny, dla $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (przemienny) zbieżny .

Zatem przedział zbieżności : $[-2,2\,)$.

4. b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}\cdot x^n}{4^n}$, $r=4$, zbieżność bezwzględna w (-4, 4). Dla $x=4$ i dla $x=-4$ są to szeregi:

$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n(n+1)}$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\sqrt{n(n+1)}$ - oba rozbieżne, zatem przedział zbieżności : (-4, 4 ).

4. d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{n^2}$, $r=1$, dla x =1 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - szereg zbieżny,

dla x = -1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ - szereg (przemienny) zbieżny , zatem przedział zbieżności: $[-1\,,1\,]$ .

4. f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot x^n}{(-3)^n}$. Przedział zbieżności : (-3, 3 ).

5. d) $f(x)=\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}$, $f(x)$ rozkładamy na ułamki proste: $\frac{7x+3}{(1-x)(4x+1)}=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{1+4x}=$

$2\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-(-4x)}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+(-4)^n\right)x^n$ . Przedział zbieżności jest wspólną częścią przedziałów obu szeregów, zatem $x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

5. f) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ dla $x\in R$; $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{n!}$; $x\cdot e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x\cdot(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{n!}$,

$x\in R$, tzn. przedział zbieżności : $(-\infty,\infty)$ .

5. g) $\operatorname{arc\,tg}x=\int\frac{1}{1+x^2}dx$; $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\text{ dla }|q|<1\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ .

Zatem $\operatorname{arc\,tg}x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $x\in(-1,1)$ (przedział zbieżności : (-1, 1)) .