SZEREGI LICZBOWE

1. Znaleźć sumę częściowe i obliczyć (jeśli istnieje) sumę szeregu: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. Znaleźć sumę częściową, wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. Wykorzystując ten fakt oraz kryterium porównacze wykazać, że szereg: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. (Wskazówka: wyrażenie $\frac{1}{k(k-1)}$ rozłożyć na ułamki proste).

3. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$, $a>0$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^{2n}}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$.

4. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2)^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

5. Zdadać rodzaj zbieżności (bezwzględna czy warunkowa) następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos \pi n}{n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n+4}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-n}{4n+2}\right)^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+4}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4^n}$.

SZEREGI POTĘGOWE, SZEREG MACLAURINA.

1. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$.

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$, p>0 c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{6^n}x^n$.

3. Znaleźć szeregi Maclaurina następujących funkcji, określić promień zbieżności otrzymanych szeregów:

a) $f(x)=\frac{2}{2+3x}$ b) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$ c) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

d) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ e) $f(x)=e^{-x^2}$ f) $f(x)=\ln(1-x)$.

4. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{5^n(n+1)}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n5^n}$.