# SZEREGI LICZBOWE

1. Znaleźć sumy częściowe i obliczyć ( jeśli istnieje ) sumę szeregu: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. Obliczyć sumę szeregu lub wykazać rozbieżność: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n+1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+2^n}{3^n}$.

3. Znaleźć sumę częściową, wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. Wykorzystując ten fakt oraz kryterium porównacze wykazać, że szereg: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. ( Wskazówka: wyrażenie $\frac{1}{k(k-1)}$ rozłożyć na ułamki proste).

4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^{2n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$.

5. Za pomocą kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów: a ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-n}(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

6. Zdadać rodzaj zbieżności ( bezwzględna czy warunkowa) następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n+4}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-n}{4n+2}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+4}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4^n}$.

# SZEREGI POTĘGOWE, SZEREG MACLAURINA.

1. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ .

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$, p>0 b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{6^n}x^n$ .

3. Znaleźć szeregi Maclaurina następujących funkcji, określić promień zbieżności otrzymanych szeregów:

a) $f(x)=\frac{2}{2+3x}$ b) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$ c) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ d) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ e) $f(x)=e^{-x^2}$ f) $f(x)=\ln(1-x)$.

4. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy następujących szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{5^n(n+1)}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot 4^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$.

5. Obliczyć całkę $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ z dokładnością do 0,001.