

TRYGONOMETRIA.

1. Korzystając z zależności trójkąta prostokątnego, podać określenia liczb: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.
Obliczyć: $\sin 30^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{ctg} 60^\circ$.
2. Podać określenie miary łukowej kąta. Wyrazić w radianach: 90° , 120° , 15° , 30° , 45° , 60° , -405° .
3. Narysować wykresy funkcji $\sin x$ i $\cos x$. Posługując się wykresami, znaleźć wszystkie wartości $x \in \mathbb{R}$ dla których: $\sin x = 0,5$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x \leq 0$; $\cos x > 0$; $\cos x \geq 1$; $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Narysować wykresy funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$. Wyznaczyć dziedzinę każdej z tych funkcji, wyjaśnić znaczenie słowa „asymptota”. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in \mathbb{R}$ dla których: $\operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = -1$; $\operatorname{ctg} x = -1$.
5. Obliczyć: a) $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ c) $\sin \frac{29}{6} \pi$ d) $\cos \frac{23}{3} \pi$
e) $\sin\left(-\frac{45}{6} \pi\right)$ f) $\operatorname{tg} \frac{17}{4} \pi$ g) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{22}{3} \pi\right)$
6. Znaleźć wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, dla: a) $\alpha = \frac{58}{8} \pi$ b) $\alpha = \frac{44}{12} \pi$ c) $\alpha = \frac{35}{3} \pi$ d) $\alpha = \frac{41}{6} \pi$.
7. Obliczyć: a) $\cos \frac{53}{6} \pi + \sin \frac{71}{3} \pi$ b) $\sin \frac{59}{6} \pi - \cos \frac{58}{3} \pi$.
8. Podać wartości kątów z pierwszego okresu (w radianach), dla których: a) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$ e) $\sin x = \cos x$.
9. Przypomnieć najważniejsze tożsamości trygonometryczne.
10. Stosując wzory wyrażające $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, obliczyć: a) $\sin^2 \frac{5\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12}$ b) $\sin \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$
11. Obliczyć: a) $\operatorname{tg} x$, jeśli $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ i $\alpha \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$, b) $\operatorname{tg} \alpha$, jeśli $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$
c) $\sin \alpha$, gdy $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ i $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ d) $\operatorname{ctg} \alpha$, gdy $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$.
12. Rozwiązać równania trygonometryczne: a) $\cos x + \cos 2x = 2$ b) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$
c) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$ d) $\operatorname{tg}^3 x + 1 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x$ e) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$ f) $2\sin x = 3\operatorname{ctg} x$.
13. Rozwiązać nierówności trygonometryczne: a) $\cos x \leq 1 - 2\cos^2 x$ b) $\operatorname{tg} 2x \geq 1$ c) $\sqrt{1 - \cos^2 x} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.