

WIELOMIANY.

1. Znaleźć wielomian stopnia 3 o współczynnikach całkowitych posiadający pierwiastki:

$x_1 = 5 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 5 + 2\sqrt{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$. Czy istnieje wielomian stopnia piątego stopnia posiadający te i tylko te pierwiastki?

2. Obliczyć (jeśli istnieją) pierwiastki trójmianu kwadratowego, sprowadzić trójmian do postaci kanonicznej, znaleźć współrzędne wierzchołka paraboli, narysować parabolę:

a) $f(x) = x^2 - 5x - 6$ b) $f(x) = 3x - x^2$ c) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$.

3. Wykonać dzielenie wielomianu przez wielomian, zapisać wynik w postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, gdzie

$R(x)$ - reszta z dzielenia, oraz sprawdzić wynik: a) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 20$ przez $x^2 - 6x$

b) $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 4x - 12$ przez $x^3 - 4x + 1$.

4. Sformułować i udowodnić twierdzenie Bezout. Jakie wnioski wynikają z tego twierdzenia?

5. Narysować wykresy funkcji (dla $a > 0$ i $a < 0$):

a) $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ b) $W(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Uzasadnić, że każdy wielomian stopnia trzeciego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

6. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu przez wielomian:

a) $3x^3 - 4x^2 + x - 7$ przez $x - 1$ b) $2x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 1$ przez $x^2 - 1$.

7. Rozwiązać równania:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ c) $x^6 - 8x^3 + 15 = 0$ d) $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$

e) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ f) $2x^3 + 11x^2 + 17x + 6 = 0$ g) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

8. Rozwiązać układy równań z dwoma niewiadomymi:

a)
$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$
.

9. Rozwiązać nierówności: a) $x^2 - 8x > 0$ b) $9 - x^2 \leq 0$ c) $x^4 \geq 1$ d) $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 > 0$

e) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$ f) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \geq 0$ g) $x^4 - 4x^2 + 3 \geq 0$ h) $x^4 - x^3 - x + 1 > 0$.